Direktan proizvod prstena

Neka su $(A,+,\cdot)$ i $(B,+,\cdot)$ prsteni. Na direktnom proizvodu $A\times B = \{(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$ se definišu binarne operacije $\oplus$ i $\odot$ na sledeći način: ~~i proizvod~~

$$(a,b)\oplus(a',b') = (a+a', b+b') \in A\times B$$
$$(a,b)\odot(a',b') = (aa', bb')$$

Lako se proverava da je $(A\times B, \oplus, \odot)$ prsten koje se nazива <u>direktan proizvod prstena</u> A i B. Pretpostavimo da ako prsten A ima jedinicu $1'$ i prsten B ima jedinicu $1''$, onda element $(1', 1'')$ je jedinični element direktnog proizvoda $A\times B$.

Takođe, ako su prsten A i B komutativni i asocijativni tada je i $A\times B$ komutativan, asocijativan prsten.

Definišu se preslikavanja:

$p_1: A\times B \to A$ definisano sa $(a,b)\to a$
$p_2: A\times B \to B$ definisano sa $(a,b)\to b$ } projekcije (epimorfizmi)

$i_1: A \to A\times B$ definisano sa $a \to (a,0)$
$i_2: B \to A\times B$ definisano sa $b \to (0,b)$ } ulaganja (monomorfizmi)

$$\bar{A} = \{(a,0) \mid a\in A\} \leq A\times B$$
$$\bar{B} = \{(0,b) \mid b\in B\}$$

$\bar{A}\simeq A$, $\bar{B}\simeq B$ koje su izomorfizmi.

Direktni proizvod prstena ima jedno **univerzalno** svojstvo.

Teorema. Za svaki prsten R i par homomorfizama prstena $\alpha: R\to A$ i $\beta: R\to B$ postoji jedinstveni homomorfizam $f: R\to A\times B$ takav da je $\alpha = p_1\circ f$, $\beta = p_2\circ f$.

Takođe, $\ker f = \ker\alpha \cap \ker\beta$

Dokaz.

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "\beta"] & \\ A & A\times B \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & B \end{tikzcd}$$

Dokazujemo da $\exists!\, f: R\to A\times B$ tako je dijagram komutativan.

Scanned by TapScanner

Definiramo $f: R \to A \times B$ na sljedeći način:

$(\forall x \in R)$ $f(x) = (\alpha(x), \beta(x))$, Tada

$(p_1 \circ f)(x) = p_1(f(x)) = p_1(\alpha(x), \beta(x)) = \alpha(x)$

$(p_2 \circ f)(x) = p_2(f(x)) = p_2(\alpha(x), \beta(x)) = \beta(x)$

<u>Korektnost</u>. $\left.\begin{array}{l} x = y \Rightarrow \alpha(x) = \alpha(y) \\ \beta(x) = \beta(y) \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha(x), \beta(x)) = (\alpha(y), \beta(y)) \Rightarrow$
$f(x) = f(y)$.

<u>Homomorfizam</u>: $\forall x, y \in R$ $f(x+y) = (\alpha(x+y), \beta(x+y)) = (\alpha(x) + \alpha(y), \beta(x) + \beta(y)) = (\alpha(x), \beta(x)) \oplus (\alpha(y), \beta(y)) = f(x) \oplus f(y)$

Slično, $f(x \cdot y) = (\alpha(xy), \beta(xy)) = (\alpha(x) \cdot \alpha(y), \beta(x) \cdot \beta(y)) =$
$= (\alpha(x), \beta(x)) \odot (\alpha(y), \beta(y)) = f(x) \odot f(y)$.

f je <u>jedinstveno</u> preslikavanje definirano.

$\operatorname{Ker} f = \{x \in R \mid f(x) = (\alpha(x), \beta(x)) = (0,0)\} = \{x \in R \mid \alpha(x) = 0 \wedge \beta(x) = 0\} =$
$= \operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} \beta$.

Dakle, svaki homomorfizam prstena α (ili β) je propusta kao direktni produkt
$\alpha = p_1 \circ f$ $(\beta = p_2 \circ f)$

Teorema. a) Ako je prsten R direktni produkt prstena A i B i $1'$ jedinica u A, $1''$ jedinica u B onda elementi $e' = (1', 0)$, $e'' = (0, 1'')$ idempotentni elementi koji pripadaju multiplikativnom centru prstena R i vrijedi $e' \oplus e'' = 1$, $e' \odot e'' = 0$.

b) Ako je asoc. prsten R sa jedinicom 1 i e njegov idempotentan element, koji pripada multiplikativnom centru prstena R, onda se prsten R raspada u direktan produkt svojih podprstena $A = eR$, $B = \bar{e}R$, gdje je $\bar{e} = 1 - e$ idempotent koji pripada multiplikativnom centru prstena R. U tom slučaju, $R = A \times B = eR \times \bar{e}R \times \bar{e}R$ i homomorfizam da je direktan produkt unutrašnji.

Dokaz: a) $R = A \times B$ $e'^2 = (1', 0) \odot (1', 0) = (1' \cdot 1', 0 \cdot 0) = (1', 0) = e'$
Slično, $e''^2 = e''$.

$Z(R)=\{z\in R \mid (\forall x\in R)\ zx=xz\}$

centar prstena R.

$(\forall x\in R)$: $e'\odot x=(1',0)\cdot(x',x'')=(1'\cdot x',0\cdot x'')=(x',0)$

$x\odot e'=(x',x'')\odot(1',0)=(x'\cdot 1',x''\cdot 0)=(x',0)$

$\Rightarrow e'\odot x=x\odot e' \Rightarrow e'\in Z(R)$.

Slično, $e''\in Z(R)$. Dokaz da poraženo da je $e'\oplus e''=(1',0)\oplus(0,1'')$

$=(1'+0,0+1'')=(1',1'')=1$.

$e'\odot e''=(1',0)\odot(0,1'')=(1'\cdot 0,0\cdot 1'')=(0,0)=0$

b) $A=eR=\{er \mid r\in R\}$

1) $er_1-er_2=e\underbrace{(r_1-r_2)}_{\in R}\in eR=A$, $\forall r_1,r_2\in R$

2) $er_1\cdot er_2=\underbrace{e\cdot e}_{\text{idemp.}}r_1r_2=e\underbrace{(r_1r_2)}_{\in R}\in eR=A$, $\forall r_1,r_2\in R$

Zaključujemo, $A\leq R$. Slično, $B\leq R$.

$\bar{e}^2=(1-e)\cdot(1-e)=1-e-\cancel{e}+\underset{\cancel{e}}{\overset{\shortparallel}{e^2}}=1-e=\bar{e}$

$(\forall x\in R)$ $\bar{e}\cdot x=(1-e)\cdot x=1\cdot x-e\cdot x=x\cdot 1-x\cdot e=x(1-e)=x\cdot\bar{e}\Rightarrow\bar{e}\in Z(R)$.

Na kraju, dokažimo da je $R\simeq A\times B=eR\times\bar{e}R$. Definišimo preslikavanje $f: R\to A\times B$ na sledeći način $(\forall x\in R)$ $f(x)=(ex,\bar{e}x)$.

<u>Korektnost</u>. Neka je $x=y\Rightarrow \left.\begin{matrix}ex=ey\\ \bar{e}x=\bar{e}y\end{matrix}\right\}\Rightarrow(ex,\bar{e}x)=(ey,\bar{e}y)$

$f(x)=f(y)$

<u>Homomorfizam preslikavanja</u> $(\forall x,y\in R)$: $f(x+y)=(e(x+y),\bar{e}(x+y))=$

$=(ex+ey,\bar{e}x+\bar{e}y)=(ex,\bar{e}x)\oplus(ey,\bar{e}y)=f(x)\oplus f(y)$.

$f(xy)=(e(xy),\bar{e}(xy))=(ee\underset{\sim}{xy},\bar{e}\cdot\bar{e}xy)=(exey,\bar{e}x\bar{e}y)=$

$=(ex,\bar{e}x)\odot(ey,\bar{e}y)=f(x)\odot f(y)$.

Scanned by TapScanner

"$1 \to 1$" - Neka je $f(x) = f(y)$, za neke $x, y \in R$:

$(ex; \bar{e}x) = (ey; \bar{e}y)$

$\Rightarrow \begin{cases} ex = ey \\ \bar{e}x = \bar{e}y \end{cases}$ $\quad ex + \bar{e}x = ey + \bar{e}y \quad \Rightarrow 1 \cdot x = 1 \cdot y$

$(\underbrace{e+\bar{e}}_{=1})x = (\underbrace{e+\bar{e}}_{=1})y \quad \Rightarrow \underline{x = y}$

$\left[e + \bar{e} = e + 1 - e = 1 \right]$

"$\underline{na}$" $\forall (er_1, \bar{e}r_2) \in \underbrace{eR}_{A} \times \underbrace{\bar{e}R}_{B}$

$\exists x = er_1 + \bar{e}r_2 \in R$, $f(x) = (ex, \bar{e}x) = (er_1, \bar{e}r_2)$

$ex = e(er_1 + \bar{e}r_2) = eer_1 + e\bar{e}r_2 = er_1 + 0 = er_1$

$\left[e\bar{e} = e(1-e) = e - e^2 = e - e = 0 \right]$

$\bar{e}x = \bar{e}(er_1 + \bar{e}r_2) = \underbrace{\bar{e}er_1}_{=0} + \bar{e}^2 r_2 = \bar{e}r_2$

Dakle, $f: R \to A \times B = eR \times \bar{e}R$ je izomorfizam prstena.

Pisemo: $R \simeq A \times B$, $R \simeq eR \times \bar{e}R$

Injektivnost da $A \cap B = \{0\}$

Neka je $x \in A \cap B$. Onda, $x \in A \wedge x \in B$, tj. $x = er_1$, $x = \bar{e}r_2$ za neke $r_1, r_2 \in R$.

$er_1 = x = (1-e)r_2$

$er_1 = r_2 - er_2$

$e \cdot \backslash \; er_1 - r_2 + er_2 = 0$

$e^2 r_1 - er_2 + e^2 r_2 = 0$

$er_1 - \cancel{er_2} + \cancel{er_2} = 0$

$\boxed{er_1 = 0}$ $\quad \boxed{x = 0}$

Da li je direktni produkt polja polje?

Odgovor: Nije.

Kontraprimjer. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ nije polje, jer sadrži djelioce nule.

$\underbrace{(0,1), (1,0)}_{\neq 0}$ $\quad (0,1) \cdot (1,0) = (0,0) = 0$

Scanned by TapScanner